Banach Tarski

Chiara Cimino, Christian Krause

May 13, 2024

Chapter 1

Freie Gruppe der Rotationen

1.1 Wahl der Rotationen und Zerlegung des Großteils der Kugel

Wir wählen konkret zwei Rotationen der Kugel, mit welchen wir die Zerlegung im Satz konstruieren werden.

Definition 1.1. *Unsere Rotationsmatrizen sind:*

Lemma 1.2 (Invertierbarkeit von A und B)**.** *Es gilt* $detA \neq 0$ *und* $detB \neq 0$ *und damit sind* A *und* B *invertierbar.*

Proof. Folgt durch Nachrrechnen. □

A und B erzeugen uns daher eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren 3×3-Matrizen.

Definition 1.3. G *bezeichnet die von* A *und* B *erzeugte Untergruppe.*

Lemma 1.4. *Die adjungierte 3x3 Matrix kann in einer bestimmten Form dargestellt werden...*

Proof. □

Lemma 1.5 (Konkrete darstellung der Drehungen)**.** *Wenn* $\rho : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ *ein Ausdruck in* G *der Länge* n *in reduzierter Form ist, dann ist* $\rho(0,1,0)$ *von der folgenden Form, wobei* a, b *und* c *ganze Zahlen sind:* $\rho(0,1,0) = \frac{1}{3^n}(a\sqrt{2}, b, c\sqrt{2})$.

Proof. Diese Behauptung folgt aus den Erzeugermatrizen und durch konkretes Multiplizieren eines reduzierten Wortes an (0,1,0). □

Damit können wir zeigen, dass diese Untergruppe an Rotationen eine freie Gruppe in zwei Erzeugern ist.

Definition 1.6. *Eine freie Gruppe* G *ist eine Gruppe, in welcher zwei Wörter auf einer spezifischen Erzeugermenge unterschiedlich sind, außer ihre Gleichheit folgt aus den Gruppenaxiomen.*

Theorem 1.7. *Die von unseren konkreten Rotationen aus 1.1 erzeugte Untergruppe* G *ist eine freie Gruppe.*

Proof. chillig. □

Chapter 2

Verdoppeln einer Kugel

2.1 Kugel

Definition 2.1 (Einheitskugel ohne Mittelpunkt). *Sei* $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ *die Einheitskugel. Wir definieren* $L' = L \backslash (0, 0, 0)$ *als Einheitskugel ohne Mittelpunkt.*

Definition 2.2 (Orbit). *Zwei Punkte* a *und* b *gehören zum selben Orbit, genau dann, wenn ein* ρ *in* G *existiert, sodass* $\rho(a) = b$ *gilt.*

Lemma 2.3 (Abzählbarkeit aller Orbits). *Die Menge aller Orbits ist abzählbar.*

Proof. □

Lemma 2.4 (repräsentative Punkte). *Wir können uns aus jedem Orbit einen repräsentativen Punkt auswählen.*

Proof. Dies folgt direkt mit dem Auswahlaxiom. □

Definition 2.5 (Menge aller Repräsentanten). M *ist die Menge aller ausgwählten repräsentativen Punkte.*

Wir können nun jeden Punkt aus L' erreichen, indem wir eine Rotation aus G auf ein bestimmtes Element in M anwenden.

2.2 Ein Teil der Einheitskugel duplizieren

Wir wollen aber, dass jeder Punkt aus L' nur von einer Rotation in G erreicht wird. Daher zerlegen wir nun L' entsprechend der Rotationen, welche einen Punkt treffen. Ein Punkt, der von mehreren Rotationen getroffen wird, kann dabei in mehreren Mengen landen.

Definition 2.6 (Fixpunkte). *Sei* Y *eine Menge und* $f : Y \to Y$ *eine Funktion. Dann heißt ein Punkt* $y \in Y$ *Fixpunkt, falls er die Gleichung* $f(y) = y$ *erfüllt.*

Definition 2.7 (Menge aller Fixpunkte). *Bezeichne mit* D *die Menge aller Punkte in* L'*, welche Fixpunkte der Rotationen in* G *sind.*

Lemma 2.8 (Abzählbarkeit von G). G *ist abzählbar.*

Proof. Steht noch aus. □

Definition 2.9 (Genau eine Rotationsachse). *Jede Rotation in G hat genau eine Rotationsachse.*

Lemma 2.10 (Abzählbarkeit Rotationsachsen). *Die Rotationsachsen liegen auf abzählbar vielen Linien.*

Proof. Steht noch aus. □

Daher kann fast jeder Punkt in L' durch eine bestimmte Rotation erreicht werden. Wir betrachten nun zunächst eine Zerlegung von $L'\backslash D$ und kümmern uns später um die Fixpunkte.

Definition 2.11 (Vereinigung X). $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A^{-k}M$. *X ist also die Menge aller Elemente von* M*, welche ausschließlich aus Rotationen um* A^{-1} *bestehen.*

Definition 2.12 (Zerlegung in Mengen). $P_1 = S(A)M \cup M \cup X$
$P_2 = S(A^{-1})M\backslash X$
$P_3 = S(B)M$
$P_4 = S(B^{-1})M$

Lemma 2.13 (Vereinigung der Zerlegung). $L'\backslash D = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$

Proof. Steht noch aus. □

Lemma 2.14 (Drehung zerlegte Mengen). $AP_2 = P_2 \cup P_3 \cup P_4$ $BP_4 = P_1 \cup P_2 \cup P_4$

Proof. Steht noch aus. □

Lemma 2.15 (Verdopplung L'
D). $L'\backslash D = P_1 \cup AP_2$ $L'\backslash D = P_3 \cup BP_4$

Proof. Steht noch aus. □

Lemma 2.16 (Abzählbarkeit der repräsentativen Punkte). *Die Menge der Repräsentativen Punkte ist abzählbar.*

Proof. TODO □

Nun haben wir eine Zerlegung, welche uns erlaubt, die Kugel bis auf ihren Mittelpunkt und den Punkte auf den Rotationsachsen zu duplizieren.

2.3 Fixpunkte und der Mittelpunkt

Definition 2.17 (Äquidekomponierbar). *Zwei Mengen C und D heißen äquidekomponierbar, wenn C in endlich viele Teile zerlegt werden kann, welche durch Rotationen und Translationen zu D wieder zusammengefügt werden können.*

Lemma 2.18 (Äquidekomponierbarkeit von L'
D und L'). $L'\backslash D$ *und* L' *sind Äquidekomponierbar*

Proof. Da die Punkte in D auf abzählbar vielen Achsen liegen, kann man eine Linie l durch den Ursprung finden, die D nicht durchläuft. Außerdem gibt es einen Winkel θ, sodass eine Drehung um θ um l keinen Punkt in D auf einen anderen Punkt in D abbildet. Definiere $E = D \cup \rho(D) \cup \rho^2(D) \cup \rho^3(D) \cup \ldots$. Es folgt sofort, dass $L' = E \cup (L' \backslash E)$, was äquidekomponierbar mit $\rho(E) \cup (L' \backslash E)$ ist. Aus der Definition von E folgt, dass $\rho(E) = E \backslash D$ also gilt $\rho(E) \cup (L' \backslash E) = (E \backslash D) \cup (L' \backslash E) = L' \backslash D$. Daher folgt, dass L' mit $L' \backslash D$ äquidekomponierbar ist. □

Da wir nun wissen, dass $L' \backslash D$ mit L' äquidekomponierbar ist, sind die Fixpunkte der Rotationen in G kein Problem mehr. Daher kümmern wir uns nun um den Mittelpunkt.

Lemma 2.19 (Pi und Wurzel 2 haben kein gemeinsames vielfaches)**.** $\nexists p, q \in \mathbb{Z} \sqrt{2} \cdot \frac{p}{q} = \pi$

Proof. Angenommen es gäbe $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{2} \cdot \frac{p}{q} = \pi$. Nach Definition von $\cos^{-1}$ auf dem Intervall $[0; 2\pi)$ gilt $\cos^{-1}(-1) = \pi$ und damit wäre $\cos^{-1}(-1) = \sqrt{2} \cdot \frac{p}{q}$. Dies ist äquivalent zu $-1 = \cos(\sqrt{2} \cdot \frac{p}{q})$. Mit der Taylorreihe des cosinus würde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2 \cdot \frac{p^2}{q^2})^n = -1$ gelten. Es gilt:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2 \cdot \frac{p^2}{q^2})^n = -1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot \frac{p^2}{q^2})^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot \frac{p^2}{q^2})^{2n+1}}{(2n)!}$ □

Lemma 2.20 (Äquidekomponierbarkeit Kreis)**.** *Ein Kreis ist äquidekomponierbar mit einem Kreis ohne einen bestimmten Punkt.*

Proof. Wir kümmern uns um den Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ohne $(1, 0)$. Wir verwenden den Einheitskreis, um die Notation einfacher zu halten; das folgende Argument kann aber auf jeden beliebigen Kreis übertragen werden. Sei weiter $A = \{(cosn, sinn) : n \in \mathbb{Z}\}$. Da π irrational ist, gilt $(cosn, sinn) \neq (cosm, sinm)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$. Daher ist A abzählbar unendlich und enthält $(1, 0)$ nicht. Sei $B = (S^1 \backslash \{(1, 0)\}) \backslash A$. Rotiere nun A um den Ursprung um -1 Einheiten. Bezeichne diese gedrehte Menge mit A'. Diese Rotation bildet $(cos1, sin1)$ auf $(1, 0)$ ab, was gerade unserem fehlenden Punkt entspricht. Da jeder Punkt in A eine Einheit neben den Punkten aus A' liegt und A abzählbar unendlich ist, liegt jeder Punkt, der ursprünglich in A war auch in A'. Daraus folgt $A' = A \cup \{(1, 0)\}$ und daher ist $S^1 \backslash \{(1, 0)\} = A \cup B$ äquidekomponierbar mit $A' \cup B = S^1$. □

Lemma 2.21 (Äquidekomponierbarkeit Subset)**.**

Proof. □

Theorem 2.22 (Äquidekomponierbarkeit Kugel)**.** *Eine Kugel ohne ihren Mittelpunkt ist äquidekomponierbar mit der vollständigen Kugel.*

Proof. Die Konstruktion eines Kreises im Inneren der Kugel, welcher den Mittelpunkt der Kugel beinhaltet, liefert zusammen mit Lemma **??**, dass die Kugel ohne ihren Mittelpunkt äquidekomponierbar mit der vollständigen Kugel ist. □

2.4 Der endgültige Beweis

Nachdem wir die notwendigen Details zusammen haben, können wir nun das gesamte Paradoxon zeigen.

Theorem 2.23 (Banach-Tarski)**.** *Eine Kugel ist äquidekomponierbar mit zwei Kopien ihrer selbst.*

Proof. Im zweiten Unterkapitel haben wir gezeigt, dass die Kugel ohne ihren Mittelpunkt und den Punkten auf den Rotationsachsen äquidekomponierbar mit zwei Kopien ihrer selbst ist. Mit Lemma **??** folgt, dass die Kugel ohne ihren Mittelpunkt äquidekomponierbar mit zwei Kopien von sich ist. Nach Theorem **??** folgt nun, dass die vollständige Kugel mit zwei Kopien von sich äquidekomponierbar ist. □